НАУЧНО-ЗАБАВНАЯ БИБЛІОТЕКА ДЛЯ СЕМЬИ И ШКОЛЫ.
(25 выпусковъ).
Подъ редакціей препод. Моск. гимн. Ник. Аменицкаго.

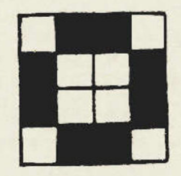
Выпускъ 15-й.

Мозаичныя работы, основанныя на вычисленіяхъ.

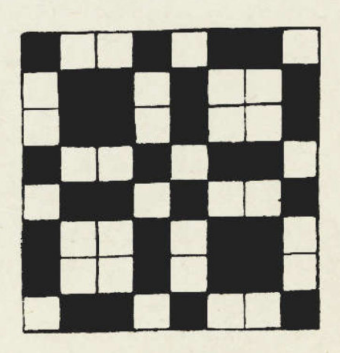
Съ 20 рисунками.



СОДЕРЖАНІЕ.



Цѣна 15 коп.



Москва.—1912.
Складъ изданія у книгоиздательницы А. С. ПАНАФИДИНОЙ.
Лялинъ пер., соб. домъ.

(См. слѣд. стр. обложки).

НАУЧНО-ЗАБАВНАЯ БИБЛІОТЕКА ДЛЯ СЕМЬИ и ШКОЛЫ.
(25 выпусковъ).
Подъ редакц. препод. Моск. гимн. НИК. АМЕНИЦКАГО.

Выпускъ XV.

Мозаичныя работы, основанныя на вычисленіяхъ.

Съ 20 рисунками.

СОДЕРЖАНІЕ:

Цѣна 15 коп.

МОСКВА.—1912.
Складъ изданія у кн-цы А. С. Панафидиной.
Лялинъ пер., соб. домъ.



МОСКВА—1912.
Типографія Русскаго Товарищества, Мыльниковъ п., соб. д.
Телефонъ 18-35.

Отъ редактора.

Имѣя въ виду все болѣе и болѣе возрастающій интересъ къ *такой* литературѣ, которая затрагиваетъ живые и любопытные вопросы и вмѣстѣ съ тѣмъ возбуждаетъ любознательность, пытливость и самодѣятельность юныхъ читателей, — я полагаю, что предпринятое изданіе «*Научно-забавной библіотеки*» вполнѣ своевременно и желательно.

Стараясь дать интересный подборъ игръ и занятій, составители стремились придать изложенію таковыхъ возможно большую простоту и живость слѣдя въ то же время и за тѣмъ, чтобы высказываемыя попутно мысли были болѣе или менѣе обоснованы, а *возможность* того или иного вопроса—была изслѣдована всесторонне.

Принимая все это во вниманіе, составители позволяютъ себѣ надѣяться, что «*Научно-забавная библіотека*», дѣйствительно, явится для учащейся молодежи средствомъ провести свой досугъ пріятно и съ пользой.

Ник. Аменицкій.

Въ непродолжительномъ времени ***выйдутъ въ свѣтъ,*** *между прочимъ,* ***слѣдующіе выпуски*** *«Научно-забавной библіотеки»:*

Вып. 16. Домино.
» 17. Математическія шутки, вопросы и софизмы.
» 18. Любопытныя пріемы мышленія.—Немного ученія о памяти.
» 19. Счетные приборы.—Игра въ «мельницу».
» 20. Американская игра съ жетонами.
» 21. Игра «хамелеонъ».—Игра въ рулетку.
» 22. Опыты съ апельсинными корками.
» 23. Фокусы съ картами, основанные на ариѳметическихъ вычисленіяхъ.
» 24. Игры въ спички.
» 25. Опыты, основанные на обманѣ чувствъ.

Мозаичныя работы, основанныя на вычисленіяхъ.

I. Введеніе.

Среди игръ и забавъ, которыя такъ или иначе связаны съ ариѳметическими вычисленіями, видное мѣсто занимаютъ такъ называемыя *мозаичныя работы*, вся сущность которыхъ сводится къ весьма интереснымъ и разнообразнымъ комбинаціямъ цвѣтныхъ плитокъ.

Игры и занятія, въ основу которыхъ была положена, такъ сказать, *гимнастика ума*, играли большую роль у древнихъ народовъ, смотрѣвшихъ на воспитаніе подрастающаго поколѣнія съ практической точки зрѣнія, и потому старавшихся прибѣгать къ такимъ пріемамъ, благодаря которымъ въ дѣтяхъ могла бы развиться пытливость и изобрѣтательность.

Подтвержденіе этого мы находимъ въ сочиненіяхъ греческаго философа *Платона*, который, между прочимъ, говорилъ, что упражнять дѣтскій умъ необходимо путемъ частыхъ, разнообразныхъ и легкихъ вычисленій, носящихъ чисто практическій характеръ. Платонъ, напримѣръ, рекомен-

дуетъ, воспользовавшись въ качествѣ нагляднаго пособія *вѣнками*, развивать въ дѣтяхъ любовь и навыкъ къ счету путемъ сравниванія, дѣленія, прибавленія различнаго числа вѣнковъ, розданныхъ играющимъ дѣтямъ.

Что же касается мозаичныхъ сооруженій, то древніе, какъ уже сказано, питали къ нимъ особенное пристрастіе, чѣмъ и объясняется то безконечное разнообразіе рисунковъ, которое можно было встрѣтить въ красивыхъ мозаичныхъ работахъ древнихъ мастеровъ.

Это разнообразіе зависѣло вовсе не отъ замысловатости и сложности рисунковъ и красокъ, а достигалось путемъ опредѣленнаго комбинированія *небольшого числа* двухцвѣтныхъ плитокъ. Каждая плитка, имѣвшая квадратную форму, была раздѣлена діагональю на двѣ равныя части, изъ которыхъ одна была окрашена въ бѣлый цвѣтъ, а другая—въ черный.

Такимъ образомъ, каждая такая плитка, будучи приложена къ другой одной изъ своихъ четырехъ сторонъ, можетъ занять одно изъ четырехъ различныхъ положеній. Если же въ данной комбинаціи участвуетъ большее число плитокъ, то число всѣхъ возможныхъ комбинацій изъ нихъ дѣлается огромнымъ, и *всѣ* онѣ могутъ быть осуществлены лишь при условіи, что мозаичная работа будетъ производиться по опредѣленнымъ законамъ.

Во всѣхъ дошедшихъ до насъ архитектурныхъ памятникахъ древней Греціи мы видимъ, что вышеупомянутое условіе соблюдено, и всѣ плитки, составляющія то или другое мозаичное сооруженіе, скомбинированы строго опредѣленнымъ образомъ.

То же самое приходится сказать и про тѣ мозаики, которыя были найдены, какъ при раскопкахъ Геркулана и Помпеи, такъ и въ нѣкоторыхъ другихъ городахъ Италіи.

Въ одномъ изъ сочиненій, трактующемъ *о соединеніяхъ* и принадлежащемъ перу французскаго автора *Себастьяна Трюше* (*Sébastien Truchet*), жившаго въ началѣ XVIII вѣка, мы встрѣчаемъ описаніе квадратныхъ фаянсовыхъ плитъ, которыя были имъ найдены во время путешествія по Орлеанскому каналу, въ одномъ изъ старинныхъ замковъ.

Каждая изъ этихъ плитокъ, послужившихъ для замощенія пола въ часовнѣ и въ нѣкоторыхъ другихъ комнатахъ замка, состояла изъ двухъ разноцвѣтныхъ частей, раздѣленныхъ діагональю квадрата.

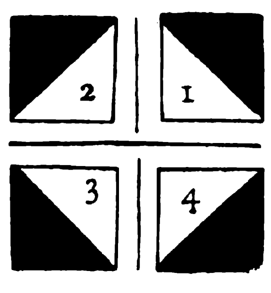
Трюше заинтересовался вопросомъ, *сколькими способами* могутъ быть размѣщены эти плитки при образованіи различныхъ красивыхъ мозаичныхъ рисунковъ. Свое изслѣдованіе Трюше начинаетъ съ наименьшаго числа плитокъ, т.-е., съ двухъ штукъ, и, переходя послѣдовательно все къ большему и большему числу плитокъ, благополучно приходитъ къ окончательному разрѣшенію интересовавшаго его вопроса.

Этотъ трудъ С. Трюше значительно повліялъ на развитіе одного изъ интересныхъ отдѣловъ математики, а именно такъ называемой *теоріи соединеній*.

2. Математическая теорія мозаичныхъ сооруженій.

Начнемъ съ того, что должно быть ясно съ перваго взгляда для каждаго изъ нашихъ читателей.

Несомнѣнно, что квадратъ, раздѣленный діагональю на два одинаковыхъ треугольника, изъ которыхъ одинъ чернаго цвѣта, а другой — бѣлаго, можетъ занять одно изъ четырехъ положеній, изображенныхъ на фиг. 1-ой и отличающихся другъ отъ друга лишь *направленіемъ діагонали.*



Фиг. 1.

Каждое изъ этихъ положеній такого квадрата мы назовемъ одной изъ цифръ: 1, 2, 3, 4.

Эти четыре квадрата, будучи взяты *по два*, могутъ занять **16** различныхъ положеній, и это число представляетъ собою не что иное, какъ *число размѣщеній* изъ четырехъ предметовъ, взятыхъ по два.

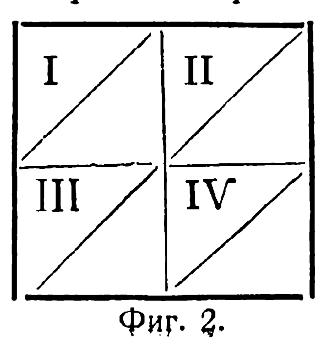
Символически, т.-е., при помощи вышеупомянутыхъ цифръ, всѣ эти размѣщенія можно представить въ видѣ такой таблицы:

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

Среди этихъ соединеній встрѣчаются комбинаціи двухъ родовъ: одни отличаются другъ отъ друга цифрами, какъ напримѣръ, 23 и 41, а другія—только порядкомъ этихъ цифръ, какъ напримѣръ, 34 и 43.

Если бы мы пожелали интересоваться только *первой* категоріей этихъ соединеній, т. е., стали бы считать за *одинаковыя* такія двѣ комбинаціи, которыя отличаются другъ отъ друга лишь порядкомъ цифръ, то, число всѣхъ соединеній уменьшилось бы до *10*, и это число представляло бы собою *число* такъ называемыхъ *сочетаній* изъ четырехъ предметовъ, взятыхъ по два.

Теперь перейдемъ къ опредѣленію *числа* возможныхъ соединеній, которыя могутъ быть получены при помощи одного квадрата, составленнаго изъ *четырехъ* одинаковыхъ квадратныхъ плитокъ (фиг. 2), изъ которыхъ каждая раздѣлена діагональю на двѣ равныя разноцвѣтныя части.



Фиг. 2.

Этотъ вопросъ можно легко разрѣшить, если подъ каждымъ соединеніемъ, встрѣчающимся въ помѣщенной выше таблицѣ, подписать одно изъ 16-ти размѣщеній этой таблицы.

На фигурѣ 3-й мы даемъ десять такихъ примѣрныхъ размѣщеній, но само собою разумѣется, что число всѣхъ возможныхъ размѣщеній такого

1 1	1 1
1 1	3 3

1 3	1 4
3 1	2 3

2 1
3 4

1 2	1 4
4 3	3 2

1 3	4 3
4 2	1 4

2 1
1 2

Фиг. 3.

рода гораздо больше: оно, какъ, вѣроятно, понимаютъ читатели, равно 16×16, т. е. **256** (или 2^8).

Стало-быть, это число представляетъ собою *число возможныхъ размѣщеній изъ четырехъ предметовъ, взятыхъ по четыре*.

Изъ этихъ 256-ти квадратовъ, пользуясь тѣмъ же пріемомъ, т.-е., *подставляя* подъ каждый изъ нихъ одну изъ 256-ти комбинацій, возможно получить, очевидно, 256×256, т. е., **65536** (т.-е. 2^{16}) различныхъ положеній.

Разсуждая такимъ же образомъ и далѣе, мы увидимъ, что пользуясь квадратомъ, состоящимъ изъ 16-ти плитокъ, возможно получить несравненно большее число различныхъ положеній, а именно:

65536×65536=**4294967296** (или 2^{32}).

Если же квадратъ состоялъ бы изъ 64-хъ плитокъ, то это число возрасло бы до 2^{128}, что составило бы:

18446744073709551616 *различныхъ положенiй.* Здѣсь интересно напомнить нашимъ читателямъ, что если это число *уменьшить на единицу*, то получится уже знакомое число зеренъ, которыя пришлось бы положить на шахматную доску, если бы класть на первую клѣтку одно зерно, на вторую — два, на третью — три и т. д., все удваивая число зеренъ до послѣдней 64-ой клѣтки (см. стр. 66, вып. V *Научно-забавной библiотеки*).

Пользуясь этимъ случаемъ, мы позволимъ себѣ отклониться нѣсколько въ сторону и обратить вниманiе читателей на числа, подобныя числу $2^{64}-1$.

Лассэръ (*Le Lasseur*) нашелъ, что числа:

$$2^{97}-1,\ 2^{211}-1,\ 2^{251}-1 \text{ и } 2^{223}-1$$

дѣлятся безъ остатка соотвѣтственно на такихъ большихъ дѣлителей, какъ:

11447, 15193, 18121, 18287.

Кромѣ того онъ доказалъ, что *всѣ другiя числа, вида* $2n-1$, гдѣ подъ *n* слѣдуетъ разумѣть любое *первоначальное* число, не превышающее 257, *не имѣютъ дѣлителя меньше 30000.*

Методъ, которымъ руководился въ этомъ случаѣ Лассэръ, вполнѣ тождественъ съ тѣми прiемами, которые были извѣстны французскому монаху-математику *Фермату* (*Fermat*), жившему въ XVII вѣкѣ.

Ферматъ въ одномъ изъ своихъ писемъ (отъ 7-го апрѣля 1643 года) къ одной изъ духовныхъ особъ сообщаетъ нѣкоторыя данныя по этому поводу, которыя не лишены интереса, и потому мы приводимъ здѣсь этотъ документъ въ извлеченiи.

„Вы меня спрашиваете,—пишетъ онъ,—первоначально ли число 100895598169, и нѣтъ ли способа узнать это не долѣе, какъ въ теченіе сутокъ. На этотъ вопросъ я отвѣчу вамъ, что это число составное, такъ какъ получается отъ перемноженія двухъ чиселъ: 898423 и 112303, которыя, однако, первоначальны... Остаюсь, какъ всегда, мой уважаемый отецъ, вашимъ смиреннымъ и покорнымъ рабомъ. *Ферматъ*".

Такъ просто и какъ будто бы, безхитростно разрѣшались головоломные вопросы еще въ далекомъ прошломъ.

Чтобы оцѣнить все значеніе трудовъ этого монаха и его выводовъ, надо прежде всего замѣтить, что въ то время не только не существовало *таблицъ первоначальныхъ чиселъ* (которыя теперь находятся въ употребленіи вездѣ и всюду), но тогда даже не знали тѣхъ сокращенныхъ способовъ, посредствомъ которыхъ теперь разлагаются числа на простые множители.

---

3. Процессъ мозаичной работы.

Для тѣхъ практическихъ цѣлей, которыя мы намѣрены выяснить въ настоящей бесѣдѣ, вовсе не потребуются тѣ огромныя числа различныхъ положеній плитокъ, о которыхъ говорилось выше. Всѣ тѣ положенія, которыя *не даютъ* при ихъ осуществленіи правильнаго и красиваго мозаичнаго рисунка, придется отбросить.

А для того, чтобы опредѣлить практическую пригодность того или другого положенія плитокъ, употребляется *методъ противоположности.*

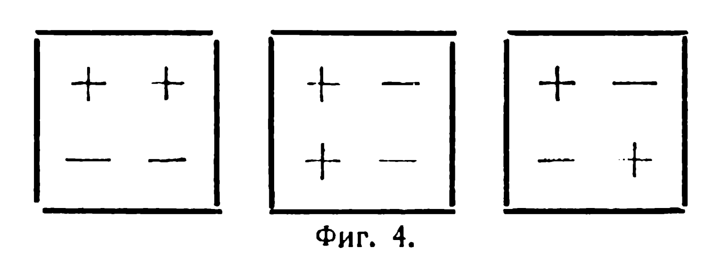
Условимся прежде всего называть *противоположными* два такія расположенія плитокъ, которыя превращаются одно въ другое путемъ замѣны черныхъ плитокъ бѣлыми, и наоборотъ.

Такъ, среди квадратовъ, изображенныхъ на фиг. 1-й, мы имѣемъ, напримѣръ, такую пару противоположныхъ положеній: 13 и 24.

Кромѣ того, для удобства изложенія, мы условимся, что, если одно изъ расположеній мы назовемъ +, то другое, противоположное ему, мы должны назвать знакомъ —.

Отсюда ясно, что нѣтъ нужды трудиться надъ составленіемъ рисунка для замощенія *всего* мозаичнаго пола, а достаточно сдѣлать это для какой-нибудь части его, а затѣмъ, пользуясь «методомъ

противоположности», продолжать мощеніе остальной части пола, который можетъ имѣть форму прямоугольника или квадрата.



Фиг. 4.

Если мы имѣемъ, напримѣръ, какое-нибудь мозаичное расположеніе плитокъ, которое назовемъ знакомъ +, то размѣры такого рисунка можно *увеличить* слѣдующими тремя способами (изображенными условно на фиг. 4-ой): 1) противоположныя положенія размѣщаются *по двумъ разнымъ строкамъ*; 2) противоположныя положенія размѣщаются *по двумъ разнымъ столбцамъ*, и 3) противоположныя положенія размѣщаются *шахматовидно* (т.-е, *по діагоналямъ*).

Вотъ, именно, этими-то способами и пользовался *Трюшэ*, въ чемъ наши читатели могутъ убѣдиться, даже не обращаясь непосредственно къ его «*Мемуарамъ*», а просто, примѣнивъ указанные пріемы къ квадратамъ, изображеннымъ ранѣе на фиг. 3-й.

4. Мозаичная работа по діагоналямъ.

Въ тѣхъ же «Мемуарахъ» Трюшэ встрѣчается и другой, не менѣе любопытный пріемъ для осуществленія различнаго рода мозаикъ.

Этотъ пріемъ, благодаря которому вся работа сводится *къ діагоналямъ* квадрата (или прямоугольника), состоитъ въ слѣдующемъ: на первой (верхней) строкѣ слѣдуетъ написать цифры 1, 2, 3 и 4 въ *любомъ* порядкѣ, а затѣмъ, переставляя эти цифры извѣстнымъ образомъ, стараться достичь того, чтобы цифры, стоящія по діагоналямъ (и не только по двумъ главнымъ) были *одинаковы*.

1	3	4	3	1	3	2	3
3	4	3	1	3	2	3	1
4	3	1	3	2	3	1	3
3	1	3	2	3	1	3	4
1	3	2	3	1	3	4	3
3	2	3	1	3	4	3	1
2	3	1	3	4	3	1	3
3	1	3	4	3	1	3	2

Фиг. 5.

Изъ разсмотрѣнія фиг. 5-й читатель пойметъ, къ чему слѣдуетъ стремиться при составленіи мозаикъ, при помощи указаннаго пріема.

5. Симметричныя мозаики.

Прежде всего необходимо замѣтить, что *симметричной фигурой* въ геометріи обыкновенно называютъ такую, которая, будучи перегнута по прямой линіи, называемой *осью симметріи*, въ точности совпадаетъ всѣми своими точками. Симметричными называются также и такія *двѣ* фигуры, которыя расположены по отношенію къ какой-нибудь прямой такъ, что послѣ перегиба чертежа по этой прямой совпадаютъ всѣми своими точками.

Чтобы достигнуть симметричнаго расположенія квадратовъ по строкамъ и столбцамъ мозаичнаго рисунка, надо руководиться слѣдующимъ правиломъ: обозначивъ всѣ плитки мозаики, по обыкновенію, цифрами, надо прежде всего написать ихъ въ *обратномъ* порядкѣ, а затѣмъ помѣнять между собою мѣстами цифры: 1 съ 2 и 3 съ 4. Тогда мы достигнемъ симметріи въ строкахъ.

Для того же, чтобы получилась симметрія столбцовъ, придется продѣлать то же самое съ цифрами по вертикальному направленію, при чемъ мѣнять мѣстами придется другія двѣ пары цифръ, а именно: 1 съ 4 и 2 съ 3.

Поянимъ это на примѣрѣ.

Пусть мы имѣемъ такое расположеніе плитокъ:

2	4	3	1
4	3	1	2
3	1	2	4
1	2	3	4.

Чтобы достигнуть симметріи, необходимо прежде всего расположить всѣ плитки (по строкамъ) въ обратномъ порядкѣ:

1	3	4	2
2	1	3	4
4	2	1	3
4	3	2	1.

Затѣмъ, перемѣстивъ въ полученной таблицѣ 1 съ 2 и 3 съ 4, получимъ рисунокъ, въ которомъ будетъ соблюдена симметрія въ горизонтальномъ направленіи:

2	4	3	1	2	4	3	1
4	3	1	2	1	2	4	3
3	1	2	4	3	1	2	4
1	2	3	4	3	4	1	2

Если въ полученномъ расположеніи произвести аналогичныя операціи и по отношенію къ столбцамъ, то рисунокъ мозаики будетъ вполнѣ симметриченъ, и мы будемъ называть такое расположеніе плитокъ *правильнымъ*.

Итакъ, правильное расположеніе плитокъ будетъ слѣдующее (фиг. 6):

2	4	3	1	2	4	3	1
4	3	1	2	1	2	4	3
3	1	2	4	3	1	2	4
1	2	3	4	3	4	1	2
4	3	2	1	2	1	4	3
2	4	3	1	2	4	3	1
1	2	4	3	4	3	1	2
3	1	2	4	3	1	2	4

Фиг. 6.

Теперь, мы полагаемъ, наши читатели поняли, что для того, чтобы составить *альбомъ* мозаичныхъ украшеній, гдѣ были бы собраны различныя правильныя расположенія плитокъ, нѣтъ нужды воспроизводить каждый рисунокъ полностью, а можно помѣстить туда лишь *одну четверть* каждаго квадратнаго рисунка.

Здѣсь мы даемъ примѣры такихъ образчиковъ для альбома, при чемъ на фиг. 7-й приведены

2	4	3
4	2	4
1	4	2

4	2	1
2	4	3
3	1	4

4	3	4
1	2	2
4	2	4

Фиг. 7.

образцы симметричной мозаики изъ 36 плитокъ,

2	4	3	1
4	3	1	2
3	1	2	4
1	2	3	4

2	4	2	4
4	2	4	2
2	4	2	4
4	2	4	2

2	1	3	4
4	2	1	3
2	1	3	4
4	2	1	3

2	4	1	3
4	2	3	1
3	1	4	2
1	3	2	4

Фиг. 8.

на фиг. 8-й имѣются четыре образца для мозаичной работы при *64* плиткахъ и, наконецъ, на фиг. 9-й помѣщены два образца для мозаики, состоящей изъ *100* клѣтокъ.

4	2	2	4	2
2	2	4	2	4
2	4	2	4	2
2	2	4	2	2
2	4	2	2	4

4	1	3	1	3
3	4	2	4	2
1	2	4	2	4
3	4	2	4	1
1	2	4	3	4

Фиг. 9.

Изъ такихъ образцовъ легко уже составить и цѣлый рисунокъ, для чего придется или просто сложить между собою всѣ четыре четверти квадрата, или примѣнить методъ противоположности, или расположить клѣтки въ шахматовидномъ порядкѣ.

Мы увѣрены, что тѣ изъ нашихъ читателей, которые заинтересуются разсматриваемымъ вопросомъ и пожелаютъ заняться составленіемъ мозаичныхъ рисунковъ при помощи описываемыхъ пріемовъ, будутъ поражены безконечнымъ разнообразіемъ и строгой симметріей получаемыхъ рисунковъ.

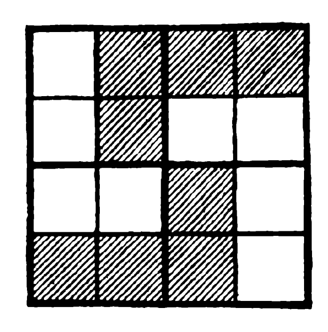


6. Квадраты Сильвестера.

До сихъ поръ были описаны такія мозаичныя работы, для которыхъ требовались плитки, раздѣленныя діагональю на двѣ равныя части разныхъ цвѣтовъ (большей частью бѣлаго и чернаго).

Г. Сильвестеръ (*Sylvester*), работавшій надъ теоріей мозаичныхъ украшеній, выдѣлилъ въ особую категорію квадраты, составленные изъ плитокъ, изъ которыхъ часть чернаго цвѣта, а остальныя—бѣлаго, и назвалъ эти квадраты *аналлагматическими*.

Число бѣлыхъ и черныхъ плитокъ аналлагматическаго квадрата можетъ быть одинаково и неодинаково, но онѣ должны быть непремѣнно распредѣлены такимъ образомъ, чтобы *число измѣненій окраски плитокъ въ любомъ столбцѣ и любой строкѣ такого квадрата во всѣхъ случаяхъ оставалось постояннымъ*.



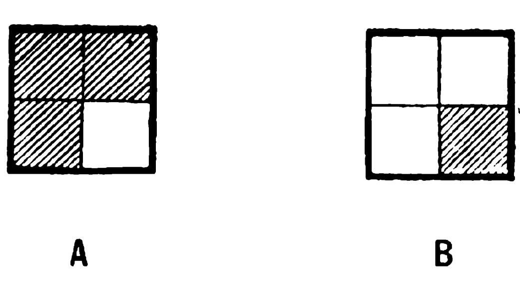
Фиг. 10.

На фиг. 10-й изображенъ аналлагматическій квадратъ въ 16 клѣтокъ; изъ разсмотрѣнія этого рисунка читатели легко могутъ убѣдиться, что вышеупомянутое условіе соблюдено здѣсь въ точности: какъ въ любомъ горизонтальномъ, такъ и въ вертикальномъ направленіи мы имѣемъ *или одну бѣлую клѣтку и три черныхъ, или одну черную клѣтку и три бѣлыхъ.*

Какъ на примѣръ аналлагматическаго мощенія можно указать на очень красивый мозаичный полъ въ одной изъ залъ Лондонскаго парламента, гдѣ плитки изъ розоваго и бѣлаго мрамора размѣщены такъ, что вышеуказанный принципъ оказывается соблюденнымъ въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, благодаря чему общее впечатлѣніе отъ такого мозаичнаго сооруженія получается прекрасное.

Само собой разумѣется, что *методъ противоположности*, о которомъ упоминалось ранѣе, можетъ быть примѣненъ и къ аналлагматическимъ квадратамъ; для этого стоитъ только черныя плитки замѣнить бѣлыми, а бѣлыя—черными.

Такъ на фиг. 11-й помѣщены два квадрата *A* и *B*, которые могутъ быть названы противоположными.



Фиг. 11.

Каждый изъ этихъ квадратовъ имѣетъ по 2×2 клѣтокъ, но, понятно, что изъ этихъ квад-

ратовъ легко составить болѣе сложный рисунокъ, примѣнивши все тотъ же *методъ противоположности*.

A	A
A	B

Кв. A_1

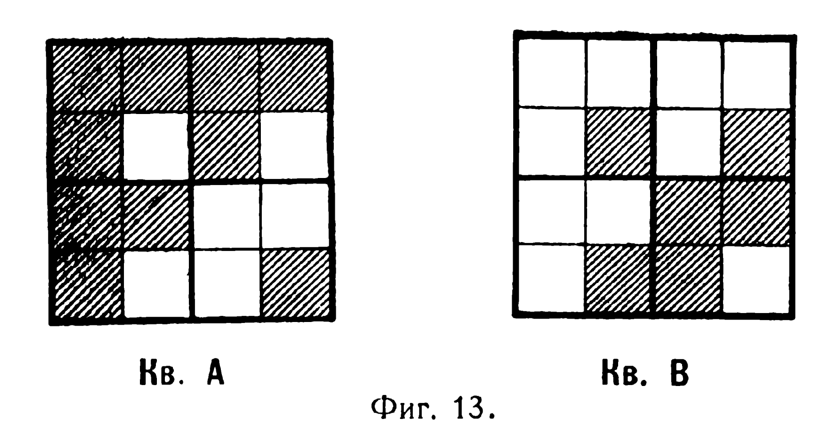
B	B
B	A

Кв. B_1

Фиг. 12.

Дѣйствительно, если мы сложимъ четыре такихъ квадрата, какъ A_1, то будемъ имѣть квадратъ A_1 съ 4×4 клѣтками (фиг. 12), а если къ квадрату A_1 будетъ примѣненъ методъ противоположности, то получится квадратъ B_1.

Тогда эти вновь получившіеся квадраты (A_1 и B_1) будутъ имѣть видъ, изображенный отдѣльно на фиг. 13-й.



Фиг. 13.

Поступая точно такимъ же образомъ и далѣе, можно изъ квадратовъ A_1 и B_1 (фиг. 12), путемъ замѣны каждаго изъ квадратовъ A квадратомъ A_1 и каждаго изъ квадратовъ B квадратомъ B_1, получить новые противоположные квадраты, которые будутъ имѣть по 8×8 клѣтокъ.

Примѣняя такой пріемъ нѣсколько разъ, мы, очевидно, можемъ образовать такой аналлагматическій квадратъ, на каждой сторонѣ котораго будетъ размѣщено 2^n клѣтокъ, гдѣ подъ *n* слѣдуетъ разумѣть любое цѣлое число.

Получивши же одинъ изъ такихъ квадратовъ съ требуемымъ числомъ клѣтокъ, можно варьировать расположеніе плитокъ различнымъ образомъ: или перемѣщая между собою строки и столбцы, или замѣняя цвѣтъ плитокъ (какой-либо строки или столбца) одинъ другимъ.

---

7. Математическое обоснованіе аналлагматическихъ квадратовъ [1]).

Все, что было здѣсь сказано по поводу образованія и видоизмѣненій аналлагматическихъ квадратовъ, какъ оказывается, можетъ быть связано съ математическими формулами.

Этимъ мы обязаны трудамъ извѣстныхъ математиковъ, работавшихъ надъ разсматриваемымъ здѣсь вопросомъ.

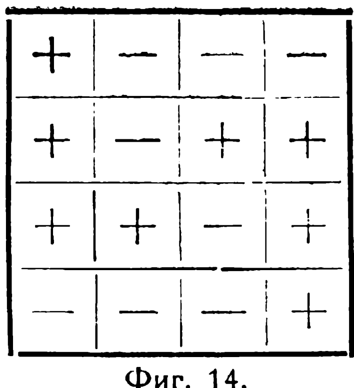
Такъ, *Леонардо Пизанскій* (*Leonard de Pise*) установилъ формулу для квадрата съ 2×2 клѣтками; *Эйлеръ* распространилъ ее на квадраты съ 4×4 клѣтками, а *Prouhet* и *Cayley* дали математическую теорію для квадратовъ съ 8×8 клѣтками.

Здѣсь мы не будемъ останавливать вниманіе читателя на подробномъ разсмотрѣніи всѣхъ разсужденій и выводовъ, сдѣланныхъ упомянутыми учеными, и укажемъ только на то, что, если въ фиг. 10-й, встрѣчавшейся ранѣе, черныя клѣтки обозначить знакомъ +, а бѣлыя знакомъ —, то по-

---

[1]) Чтеніе этой небольшой главы—необязательно; она можетъ показаться интересной только для тѣхъ изъ нашихъ читателей, которые знакомы съ элементарной алгеброй.

лученная таблица знаковъ (фиг. 14) можетъ быть подтверждена и алгебраическими вычисленіями:



Фиг. 14.

умножая сумму четырехъ квадратовъ:

$$a^2+b^2+c^2+d^2$$

на сумму другихъ четырехъ квадратовъ:

$$p^2+q^2+r^2+s^2,$$

при чемъ необходимо замѣтить, что какъ a, b, c и d, такъ и p, q, r и s могутъ быть и *положительны*, и *отрицательны*,—мы получимъ въ произведеніи сумму четырехъ квадратовъ такихъ выраженій:

$$(+ap-bq-cr-ds)^2;$$
$$(+as-br+cq+dp)^2;$$
$$(+aq+bp-cs+dr)^2;$$
$$(-ar-bs-cp+bq)^2;$$

Сравнивая фиг. 14-ю съ приведенными здѣсь алгебраическими выраженіями, нетрудно убѣдиться въ томъ, что *аналогія между знаками* въ приведенномъ примѣрѣ *полная*.

8. Нѣкоторыя свойства мозаичныхъ украшенiй.

Мозаичныя украшенiя становятся несравненно красивѣе, если плитки, образующiя ту или другую мозаику, берутся не двухъ (какъ мы допускали ранѣе), а *трехъ и болѣе цвѣтовъ*.

Этотъ вопросъ, между прочимъ, подробно разработанъ и математически обоснованъ докторомъ математики и преподавателемъ Парижскаго Политехникума *К. А. Лэзаномъ* (*Laisant*), который, вообще говоря, удѣлилъ немало вниманiя и труда популяризацiи математическихъ наукъ среди дѣтей всякаго возраста, благодаря чему онъ совершенно справедливо считается въ педагогическомъ мiрѣ „*другомъ дѣтей и юношей*".

Лэзанъ въ одномъ изъ своихъ сочиненiй, названномъ имъ: „*Sur des développements de certains produits algébraiques*" [1]), даетъ цѣлую теорiю полученiя произведенiй, исходя изъ извѣстной задачи, предложенной г. *Каталаномъ* (*Catalan*): не производя умноженiя на самомъ дѣлѣ, *узнать, какой будетъ знакъ послѣдняго члена* въ произведенiи:

$$1-a-b+ab-c+ac+bc-abc-d+\ldots\ldots,$$

---

[1]) Т.-е. „*Объ образованiи нѣкоторыхъ алгебраическихъ произведенiй*" (1881 г.).

которое получается отъ перемноженія произвольнаго числа двучленовъ:

$$(1-a) \,.\, (1-b) \,.\, (1-c) \,.\, (1-d) \ldots\ldots$$

Благодаря этой теоріи, Лэзанъ дастъ возможность получать при помощи алгебраическихъ соотношеній удивительно красивые рисунки для мозаичныхъ работъ.

Чтобы не выходить изъ рамокъ, предназначенныхъ для нашей бесѣды съ читателями, мы, разумѣется, не будемъ знакомить ихъ съ теоріей Лэзана во всей ея полнотѣ, а дадимъ лишь необходимое понятіе о тѣхъ принципахъ, которыми руководился Лэзанъ, и приведемъ тѣ выводы, къ которымъ ему удалось придти.

Обозначимъ черезъ *A* какой-нибудь квадратъ, составленный изъ бѣлыхъ и черныхъ клѣтокъ, а черезъ *B*—квадратъ съ такимъ же числомъ клѣтокъ, но полученный изъ квадрата *A* путемъ замѣны черныхъ клѣтокъ бѣлыми, а бѣлыхъ—черными.

Тогда при помощи такихъ двухъ квадратовъ будетъ возможно образовать двѣ новыхъ шахматовидныхъ доски (A_1 и B_1), изъ которыхъ каждая окажется въ четыре раза больше данной, а по

Кв. A_1

A	*B*
B	*A*

Кв. B_1

B	*A*
A	*B*

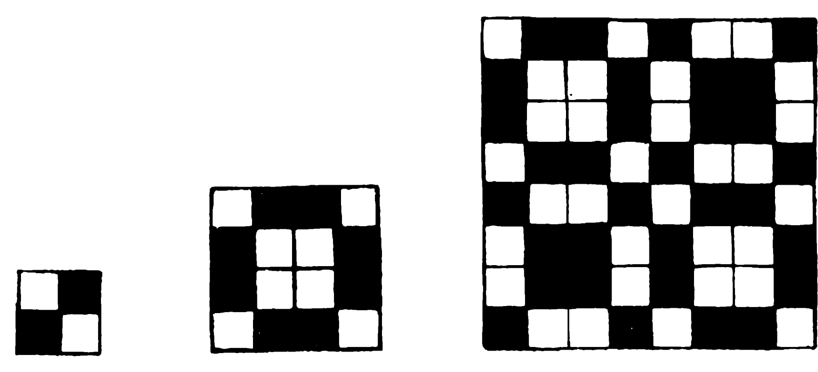
Фиг. 15.

отношенію другъ къ другу эти новые квадраты явятся ***противоположными*** (см. фиг. 15).

Если же въ полученныхъ квадратахъ замѣнить A черезъ A_1 и B черезъ B_1, то получатся два новыхъ (и также противоположныхъ) квадрата, которые будутъ въ 4 раза больше, чѣмъ A_1 и B_1, и уже въ 16 разъ больше, чѣмъ данные квадраты A и B.

Понятно, что такой ростъ квадратовъ можетъ продолжаться до безконечности.

Если теперь вообразить, что первоначальные квадраты A и B суть двѣ плитки, при чемъ одна бѣлаго цвѣта, а другая—чернаго, то легко понять, что указаннымъ выше пріемомъ нетрудно составить мозаики изъ 4, 16, 64 и т. д. плитокъ, какъ это изображено на фиг. 16-ой.



Фиг. 16.

Само собой разумѣется, что, кромѣ этихъ квадратовъ, можетъ быть образовано, соотвѣтственно каждому изъ нихъ, столько же квадратовъ, *имъ противоположныхъ*.

Теперь важно отмѣтить, что любой изъ квадратовъ, изображенныхъ на фиг. 16-ой, обладаетъ свойствомъ, присущимъ такъ называемой *Пиѳагоровой таблицѣ*.

Дѣйствительно, для того, чтобы *узнать цвѣтъ любой изъ плитокъ*, составляющихъ дан-

ный квадратъ, достаточно обратить вниманіе: 1) на цвѣтъ крайней (верхней) плитки того столбца, гдѣ находится интересующая насъ плитка, и 2) на цвѣтъ крайней (лѣвой) плитки той строки, гдѣ встрѣчается та же плитка.

Если окажется, что *окраска* этихъ двухъ крайнихъ плитокъ *одинакова*, то можно съ увѣренностью сказать, что интересующая насъ плитка *бѣлаго* цвѣта; если же крайнія плитки будутъ *различной* окраски, то наша плитка должна быть непремѣнно *черного* цвѣта.

Эти выводы остаются справедливы и для противоположныхъ квадратовъ, но въ обратномъ смыслѣ.

Кромѣ того любопытно отмѣтить еще одно обстоятельство.

1°. Плитки, одинаково отстоящія отъ концовъ любой строки и любого столбца, въ случаѣ квадрата съ 2×2, 8×8, 32×32 и т. д. клѣтками, всегда *различной* окраски (напр., 1-ый и 3-ій квадраты на фиг. 16-ой.

2°. Въ случаѣ же квадрата съ 4×4, 16×16, 64×64 и т. д. клѣтками, плитки, одинаково отстоящія отъ концовъ строки или столбца, оказываются непремѣнно *одинаковой* окраски (напр., 2-ой квадратъ на фиг. 16-ой).

Указанныя здѣсь обстоятельства имѣютъ немалое значеніе въ практикѣ мозаичныхъ работъ.

Поясним это на примѣрахъ, взявши для разсмотрѣнія хотя бы квадратъ съ 8×8 клѣтками, изображенный на фиг. 16-ой.

Пусть мы желаемъ *провѣрить цвѣтъ*, хотя бы, *правой нижней угловой плитки*.

Такъ какъ крайняя верхняя плитка послѣд-

няго столбца *чернаго* цвѣта и крайняя лѣвая плитка нижней строки тоже *чернаго* цвѣта, то разсматриваемая плитка *должна* быть *бѣлаго* цвѣта (какъ оно и есть на самомъ дѣлѣ).

Можно проконтролировать окраску плитокъ данной мозаики и другимъ способомъ, основываясь на нашихъ выводахъ, обозначенныхъ: 1° и 2°.

Пусть мы сомнѣваемся въ правильности окраски плитокъ *третьяго* (слѣва) столбца.

Тогда отсчитываемъ сверху и снизу, хотя бы, по *3* плитки и убѣждаемся что плитки, на которыхъ мы остановили свой счетъ, *различной* окраски, какъ это и должно быть (въ случаѣ квадрата съ 8×8 клѣтками) согласно вышеприведенному правилу (1°).

Или, провѣряя, напримѣръ, *пятую* (сверху) строку, мы видимъ, что, если первая *слѣва* плитка чернаго цвѣта, то первая *справа*—бѣлаго; если третья слѣва плитка бѣлаго цвѣта, то третья справа—чернаго, и т. д.

Такъ какъ все это согласуется съ тѣмъ же правиломъ, то мы можемъ сказать, что мозаика построена правильно.

Теперь перейдемъ къ вопросу *о составленіи* мозаики изъ плитокъ трехъ и болѣе цвѣтовъ.

9. Многоцвѣтныя мозаики.

Чтобы образовать правильные и пріятные для глаза мозаичные рисунки изъ плитокъ *трехъ* различныхъ окрасокъ, мы будемъ разсуждать слѣдующимъ образомъ.

Пусть мозаичный рисунокъ *A*, имѣющій форму квадрата, состоитъ изъ плитокъ *бѣлаго*, *сѣраго и черного* цвѣта.

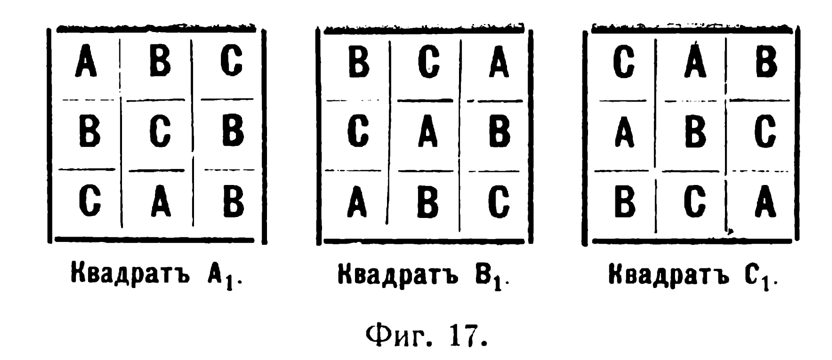
Замѣнивъ въ этой мозаикѣ: бѣлыя плитки — сѣрыми, сѣрыя — черными и черныя — бѣлыми, мы получимъ новый квадратъ, который назовемъ *B*.

Изъ квадрата B нетрунно получить третій квадратъ *C* точно такимъ же путемъ, какъ квадратъ *B* былъ образованъ изъ *A*, т.-е., замѣняя:

сѣрыя плитки — черными,
черныя » — бѣлыми и
бѣлыя » — сѣрыми.

Изъ полученныхъ трехъ квадратовъ *A*, *B* и *C* можно образовать три новыхъ болѣе сложныхъ (по рисунку) квадрата A_1, B_1 и C_1, которые бу-

дутъ въ 9 разъ больше, чѣмъ передъ тѣмъ полученные (фиг. 17).



Квадратъ A_1. Квадратъ B_1. Квадратъ C_1.

Фиг. 17.

Если въ этихъ квадратахъ произвести новую замѣну:

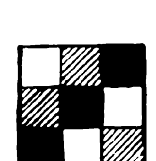
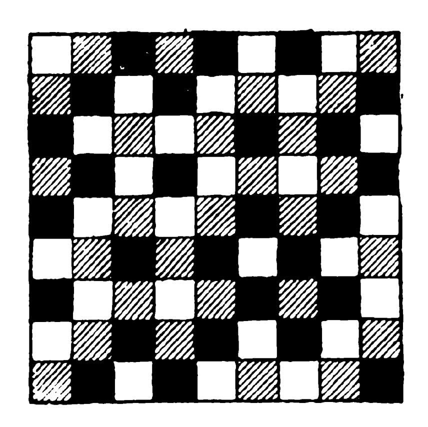
A черезъ A_1,
B черезъ B_1
и C черезъ C_1,

то получится три новыхъ трехцвѣтныхъ мозаики, изъ которыхъ каждая окажется въ 9 разъ больше, чѣмъ A_1, B_1 или C_1, и 81 разъ больше, чѣмъ A, B и C.

Само собою разумѣется, что такое увеличеніе мозаичнаго рисунка можно продолжать до безконечности.

Если теперь допустить, что A, B и C изображаютъ соотвѣтственно: бѣлую, сѣрую и черную плитки, то для нашихъ читателей должно стать яснымъ, какъ при помощи этихъ трехъ плитокъ образовать послѣдовательно трехцвѣтные мозаич-

ные квадраты, состоящіе изъ 9, 81, 729 и т. д. плитокъ.

Фиг. 18.

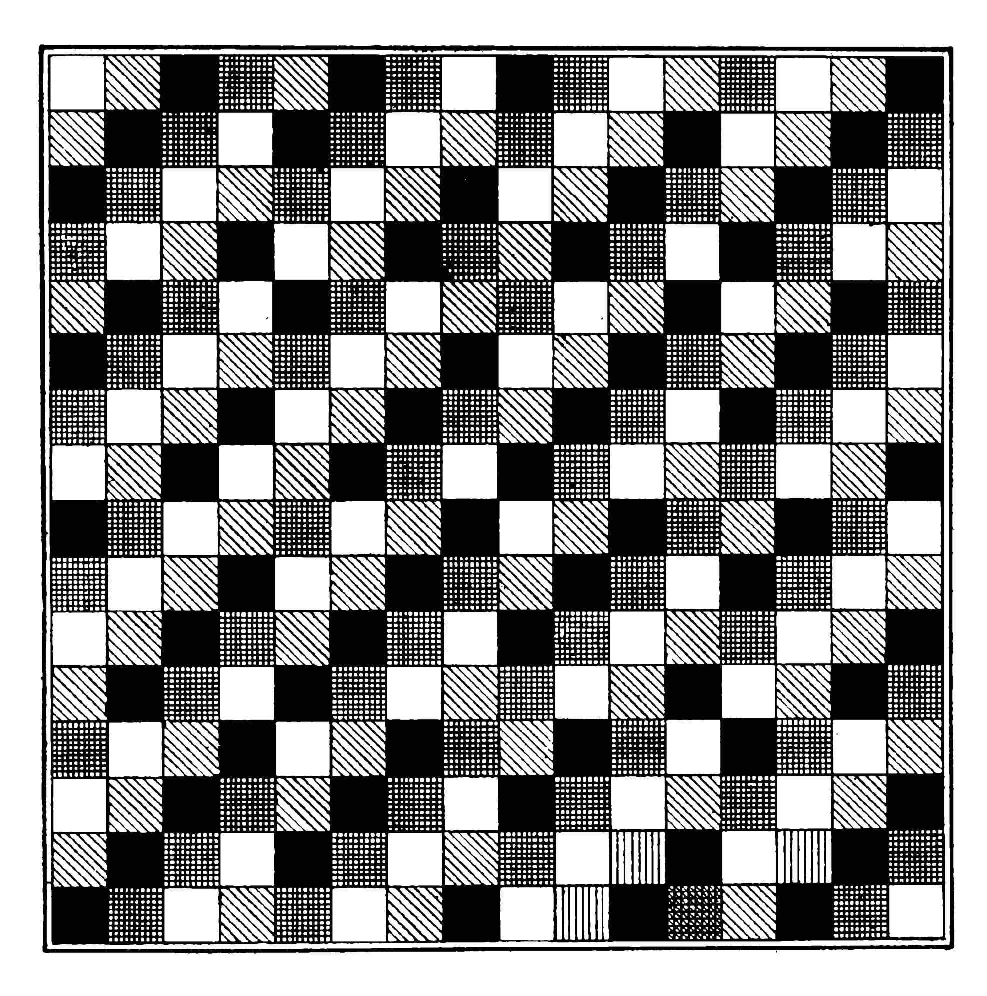
На фиг. 18-й наши читатели могутъ видѣть изображеніе такихъ мозаичныхъ квадратовъ, изъ которыхъ одинъ имѣетъ 3×3, т.-е. *9* клѣтокъ, а другой—9×9, т.-е. *81* клѣтку.

Кромѣ указанныхъ пріемовъ при составленіи разноцвѣтныхъ мозаичныхъ украшеній употребляются и другіе, о которыхъ мы упоминали не разъ въ нашей бесѣдѣ, а именно: перемѣщеніе строкъ, перестановка столбцовъ и измѣненіе окраски плитокъ.

Въ видѣ примѣра мозаичной работы изъ плитокъ ***четырехъ*** различныхъ окрасокъ: ***бѣлой, сѣрой, красной*** и ***черной***, мы помѣщаемъ здѣсь два ***условныхъ*** изображенія такихъ четырехцвѣтныхъ мозаикъ (фиг. 19 и 20), при чемъ предоставляемъ читателямъ ***самостоятельно*** добиться того, чтобы изъ мозаики, изображенной на фиг. 19-й, полу-

чилось болѣе красивое мозаичное сооруженіе, которое мы видимъ на фиг. 20-й.

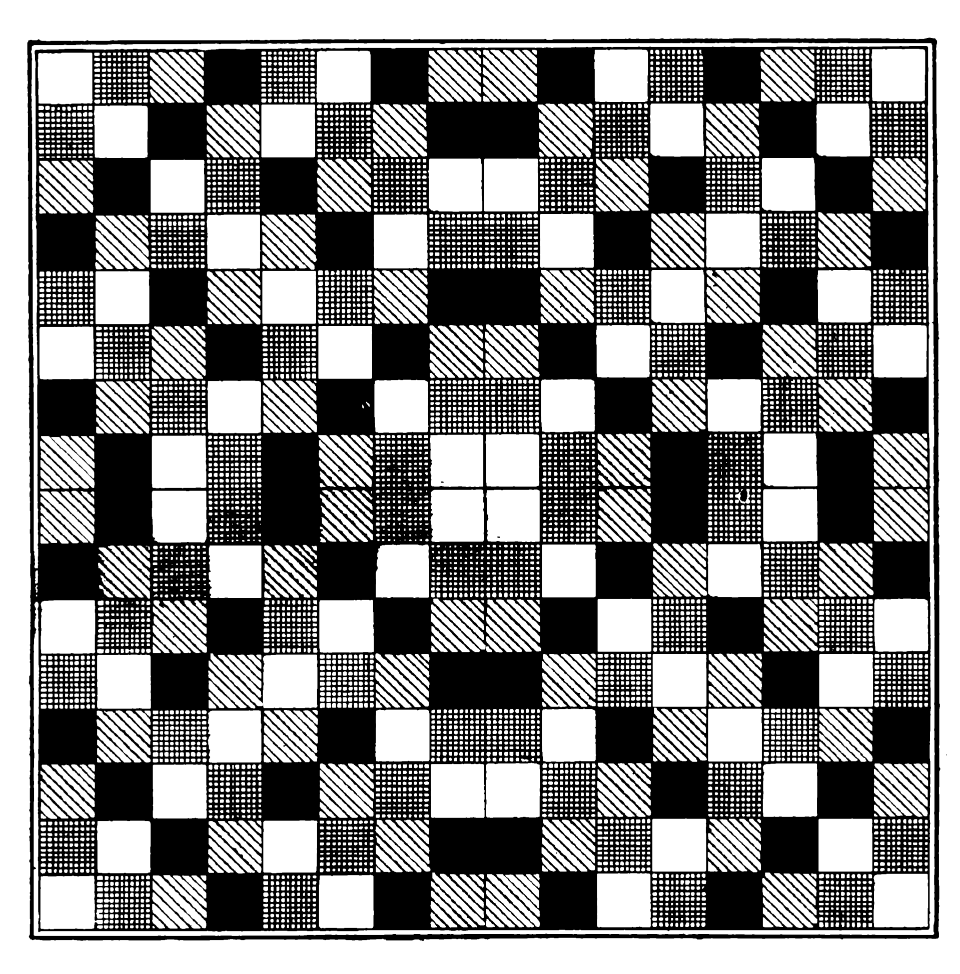
Условными же мы эти рисунки назвали пото-



Фиг. 19.

му, что, въ силу нѣкоторыхъ техническихъ условій, мы не имѣли возможности дать изображеніе этихъ мозаикъ *въ краскахъ*, а принуждены были прибѣгнуть къ условному обозначенію окраски пли-

токъ, а именно: плитки *краснаго* цвѣта на фиг. 19-й и 20-й изображены заштрихованными *діагональю* (или *параллельно сторонѣ квадрата*), а



Фиг. 20.

плитки *сѣраго* цвѣта заштрихованы *дважды:* горизонтальными и вертикальными линіями.

ОГЛАВЛЕНІЕ.



8-й выпускъ. **Ходъ коня.**

Съ 18 рисунками.

Содержаніе: Ходъ коня.—Введеніе.—Опредѣленія.—Исторія игры.—Указанія въ игрѣ.—Примѣрные образцы „ходовъ коня".—Нѣкоторые пріемы для полученія „ходовъ коня".—Магическіе ходы коня.—Отвѣтъ на задачу. Цѣна **15** коп. (36 стр.).

9-й выпускъ. **Игра въ „шашки".**

Съ рисунками.

Содержаніе: Краткій историческій очеркъ игры въ „шашки".—Польскій варіантъ игры въ „шашки".—Описаніе игры.—Обозначенія.—Условія игры въ „шашки": игра въ „поддавки".—Особенные пріемы при игрѣ въ „поддавки".—Примѣрные планы битвы 20-ти черныхъ противъ одной бѣлой.—Заключеніе. Цѣна **20** коп. (48 стр.).

10-й выпускъ. **Любопытныя перемѣщенія.**

(Игры въ „хороводы").

Съ чертежами.

Содержаніе: Дѣтскіе хороводы.—Другой способъ рѣшенія той же задачи.—Хороводы съ четнымъ числомъ участниковъ.—Смѣшанные хороводы.—Хороводы съ одной или двумя центральными фигурами.—Вереницы.—Группы изъ десяти музъ.—Задача о 15-ти дѣвушкахъ.—Китайскія церемоніи. Цѣна **20** коп. (69 стр.).

11-й выпускъ. **ЭКВИЛИБРИСТИКА.**

(Опыты, основанные на равновѣсіи тѣлъ).

Съ 24 рисунками.

Содержаніе: Предварительныя замѣчанія.—**Устойчивое равновѣсіе**: Карандашъ, стоящій на иголкѣ.—Путешествующая пробка.—Сверлильная машина.—Импровизированный маятникъ.—Карусель.—Бутылка на качеляхъ.—Висящая монета.—Сооруженіе изъ трехъ бокаловъ.—Чашка—на остріѣ шпильки.—Кувшинъ—на остріѣ иголки.—Яйцо Колумба.—Ведро съ водой на палкѣ, положенной на столъ.—Какъ поднять графинъ при помощи соломинки.—Канатный плясунъ.—Акробаты. Цѣна **20** коп.

12-й выпускъ. **ЭКВИЛИБРИСТИКА.**

Опыты, основанные на неустойчивомъ равновѣсіи тѣлъ.

Съ 38 рисунками. (**Продолженіе**).

Содержаніе: Введеніе.—**Неустойчивое равновѣсіе**: Вашъ товарищъ—въ затруднительномъ положеніи.—Положеніе вашего товарища—еще хуже.—Трудное упражненіе.—Не менѣе трудная задача.—Тотъ же опытъ при иной обстановкѣ.—Башня изъ трехъ бокаловъ.—Вавилонская стеклянная башня.—Равновѣсіе щипцовъ съ лопаткой.—Сооруженіе изъ дверныхъ ключей.—Послушная кружка.—Еще объ „яйцѣ Колумба".—Шаловливый шарикъ.—Игра въ „свинки".—Волшебный волчокъ.—Игрушки, основанныя на неустойчивомъ равновѣсіи.—Игра природы.—Опытъ съ двумя шариками.—Мнимое равновѣсіе.—Какъ поднять человѣка на пяти пальцахъ.—Заключеніе. Цѣна **25** коп.

13-й выпускъ. **СЧЕТЪ НА ПАЛЬЦАХЪ.**

Съ рисунками.

Содержаніе: Кое-что о сокращенномъ счетѣ.—Ариѳметика глухонѣмыхъ.—Какъ считаютъ дикари: африканское племя Массаи, американскіе индѣйцы и африканскіе негры, австралійцы.—Таблица умноженія на пальцахъ.—Заключеніе. Цѣна **15** коп.

14-й выпускъ. **Кое-что о силѣ и матеріи.**

Съ рисунками.

Содержаніе: 1. Введеніе.—Сила взаимнаго притяженія.—Нѣкоторые виды силъ.—О дѣлимости матеріи.—Жизнь атомовъ.—Превращеніе одной силы въ другую.—Всесильна ли современная наука? Цѣна **15** коп.

СКЛАДЪ ИЗДАНІЯ У КНИГОИЗДАТЕЛЬНИЦЫ А. С. ПАНАФИДИНОЙ.
(Лялинъ пер., соб. домъ. Тел. 32-87).

Типографія Русскаго Товарищества. Москва.